

04

CAPM, Dominancias Estocásticas & Diversificación

CAMP, Stochastic Dominance & Diversification

Fecha de recepción: 12/03/2020

Fecha de aprobación: 10/08/2020

Resumen

Freddy Benjamín Naula Sigua ¹
Diana Jackeline Arévalo Quishpi²
Diego Mauricio Loyola Ochoa ³

El artículo expone de forma aplicativa a la teoría de diversificación del portafolio, cuyos cimientos se trasladan a Markowitz (1952). Acorde a esto, inicialmente se expusieron a grandes rasgos las bases de *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), así como de la diversificación. Además, se explican ideas como las de dominancia estocástica, de primer orden; y, dominancia estocástica, de segundo orden, que plantean una forma alternativa y previa de evaluación de las opciones de inversión. Se utilizan cuatro acciones en el presente estudio, las cuales, pertenecen a: Banco de Chile (BCH), Banco Santander (BSANTANDER), Parque Arauco (PARAUCO) y Falabella (FALABELLA); estas acciones pertenecen a la Bolsa de Comercio de Santiago, Chile. Los resultados, respecto a CAPM, muestran que la mayoría se comporta en forma similar a como lo hace el mercado; es decir, tienen un beta cercana a 1. El análisis de Dominancias no permitió establecer Dominancia Estocástica de Primer Orden, no obstante, sí Dominancia Estocástica de Segundo Orden; FALABELLA domina estocásticamente en segundo a tanto a PARAUCO como BSANTANDER. Finalmente, se encontró un portafolio óptimo compuesto por las cuatro acciones; a pesar de que se permiten ventas cortas, la composición del portafolio óptimo no muestra acciones con proporciones negativas. Esta técnica serviría muy bien para valoración de diferentes proyectos, reemplazando los rendimientos de las acciones por los de los proyectos.

Palabras clave:

CAPM, Diversificación, Finanzas, Markowitz, Portafolio Óptimo.

Código JEL:

G11, G12, C13, D40.

1
Universidad de Cuenca
fbenjamin.naulas@ucuenca.edu.ec

2
Universidad de Cuenca
diana.arevalo@ucuenca.edu.ec

3
Universidad de Cuenca
diego.loyola@ucuenca.edu.ec

ABSTRACT

The article introduces the reader in applicative way to the theory of portfolio diversification, the foundations of which were transferred to Markowitz in 1952. According to this, initially they were exposed to great features the CAPM (Capital Asset Pricing Model) and diversification foundations. In addition, ideas such as the first-order stochastic dominance and the second-order stochastic dominance were explained, as one previous and alternative way of evaluating investment options. Four actions were used in this study, they all belong to: Banco de Chile (BCH), Banco Santander (BSANTANDER), Parque Arauco (PARAU-CO) and Falabella (FALABELLA); These shares belong to the Santiago Stock Exchange, Chile. The results, with respect to CAPM, showed that the majority behave similarly to how does the market; that is to say, they have a beta around 1. Dominance analysis does not allow you to establish the First-Order Stochastic Dominance, however yes second-Order Stochastic Dominance; FALABELLA dominates stochastically in second order, to both PARAU-CO and BSANTANDER. Finally, an optimal portfolio was found, consisting of the four stocks; Although short sales are allowed, the optimal portfolio composition does not show stocks with negative proportions. This technique would be very useful for evaluating different projects, replacing the returns of the shares for those of the projects.

Key Words:

CAPM, Diversification, Finance, Markowitz, Optimal Portfolio.

1. INTRODUCCIÓN

Dentro de las finanzas, uno de los ejes centrales en su campo es la diversificación del portafolio, lo que en la jerga popular se traduciría en 'no colocar todos los huevos en la misma cesta'. Lo anterior cobra importancia al considerar los eventos acontecidos durante la última década, a saber: la recesión económica que involucró a USA y gran parte de Europa, consecuencia del no pago de créditos hipotecarios subprime¹, en un entorno global cada vez más interrelacionado.

Sin embargo, el tema de la diversificación no es algo nuevo; sus fundamentos pueden remontarse al trabajo de Harry Markowitz (1952), quien introdujo el concepto y modelo media varianza como criterio para la selección de las alternativas de inversión. Posteriores aportes como los de Sharpe (1964), Litner (1965) & Mossin (1966) contribuirían a lo que hoy se conoce como *Capital Asset Pricing Model* (CAPM). Este modelo facilita la predicción de retornos de un activo dentro de la economía al considerar su interacción. El modelo CAPM goza de popularidad debido a su simpleza de factores (solo uno) fundamento teórico robusto. No obstante, aquella sencillez también le ha conllevado críticas como las de Roll (1977) o el surgimiento de modelos más amplios como los de Fama & French (1993, 2015). A pesar de ello, el modelo sigue manteniendo su vigencia².

Lo anterior se refiere al contexto de un solo activo; es decir, CAPM admite determinar su retorno esperado. Junto con ello, además, los fundamentos de Markowitz, en conjunto con trabajos de Tobin (1958), permiten establecer la combinación adecuada de diferentes activos que den paso a un portafolio óptimamente diversificado. En otras palabras, el portafolio que entrega la mayor rentabilidad con el mínimo riesgo posible. Entiéndase riesgo como la desviación estándar del rendimiento del respectivo activo o portafolio³. El presente trabajo, también pre-

1 Originada en USA en conjunto con una burbuja crediticia.

2 Tanto así que en la praxis es el más utilizado.

3 Un portafolio con activos puede ser considerado, a su vez, también como activo.

senta una herramienta adicional para la selección de alternativas de inversión: los criterios de Dominancias Estocásticas de Primer Orden y Segundo Orden, que facilitan determinar cuál de las opciones entrega una rentabilidad mayor o posee mayor probabilidad de obtener retornos más altos. Hay que mencionar que las comparaciones se las realiza por pares.

Si bien, la parte matemática y teórica en el presente trabajo se desarrolla de forma parcial y limitada, el aporte del artículo, más que conceptual, es práctico. Para su desarrollo se valió del mercado accionario chileno. Específicamente, se utilizaron las acciones de cuatro empresas que tranzan en la Bolsa de Valores de Santiago. Estas acciones son las de: Banco de Chile (BCH), Banco Santander (BSANTANDER), Falabella (FALABELLA) y Parque Arauco (P. ARAUCO). Las primeras pertenecen al sector financiero, mientras que, las segundas al sector retail⁴.

4 Retail hace referencia a la provisión de bienes o servicios uniformes de forma masificada, es decir, ventas al por menor.

1. Metodología y métodos

2.1. Retornos Esperados

Los estudios sobre el modelo de mercado, derivado de los trabajos de Sharpe (1964), Lintner (1965) y Mossin (1966), especifica un solo factor, lo que explicaría los retornos de un activo particular. Este modelo establece que el premio por riesgo de un activo es igual a su beta (β), multiplicado por el premio por riesgo del portafolio de mercado. El β mide el grado de co-movimiento entre el retorno del activo y el retorno de portafolio de mercado (Danthine & Donaldson, 2015). Además, el modelo también puede considerar una tasa libre de riesgo que, por ejemplo, para el caso chileno correspondería a un Bono BCU a diez años. La relación de equilibrio de CAPM se expresa en la ecuación (1).

$$E(r_i) = rf + \beta[E(r_m) - rf] \quad (1)$$

Donde:

$E(r_i)$: Retorno del activo i .

rf : Retorno o tasa libre de riesgo.

$E(r_m)$: Retorno del Mercado.

El beta del activo puede ser expresado con base a la ecuación (2). Mide el grado de riesgo del activo con respecto al rendimiento del mercado.

$$\beta_i = \frac{Cov(r_i, r_m)}{Var(r_m)}$$

La estimación del beta de los distintos activos puede ser realizada a través de OLS⁵. OLS requiere de ciertos supuestos (Wooldridge, 2010), que permiten una bondad de ajuste adecuada; estos supuestos son:

1. Linealidad de los parámetros. Las variables explicativas y el error están relacionados con la variable explicada de forma lineal.
2. Muestreo Aleatorio. Se posee una muestra aleatoria cuyo tamaño es n, que se supone sigue el modelo poblacional.
3. Variación Muestral de la Variable Explicativa. No todos los valores de la variable explicativa tienen el mismo valor.
4. Media Condicional Cero. Para todo valor de la variable explicativa, el valor esperado del error es cero.
5. Homocedasticidad. El error tiene la misma varianza para cualquier valor de la variable explicativa.

Sin embargo, para el caso de series de tiempo se requiere también que la serie sea estacionaria en su forma débil. Esto se expresa matemáticamente en las ecuaciones (3), (4) y (5).

$$E(y_t) = \mu \quad (3)$$

$$E(y_t - \mu)^2 = \gamma_0 \quad (4)$$

$$E(y_t - \mu)(y_k - \mu) = \gamma_k \quad (5)$$

Las estimaciones a través de OLS de los coeficientes de los respectivos activos, para nuestro caso acciones, se la realiza mediante la ecuación (6).

⁵ Ordinary Least Squares.

$$E(r_i) - rf = \alpha + \beta(E(r_m) - rf) + e \quad (6)$$

Por lo tanto, el retorno esperado sería:

$$E(r_i) - rf = \hat{\alpha} + \hat{\beta}(E(r_m) - rf) \quad (7)$$

La estimación a través de la ecuación 6 es conocida como estimación en excesos de retorno. No obstante, es bastante usual que se prescindiera de la tasa libre de riesgo y, por lo tanto, el OLS estime directamente el retorno esperado del activo i acorde al retorno observado del mercado. Así, en el presente estudio se prescinde de rf . Cabe mencionar que las estimaciones con y sin rf son prácticamente iguales. Hay que mencionar que existen algunas suposiciones tras OLS (Danthine & Donaldson, 2015), aunque, el presente trabajo no tiene como finalidad exponerlas ni comprobarlas.

Dentro de la teoría, una vez aplicado OLS, se esperaría un alfa igual a cero, ya que de esta manera el β sería el único factor que explicaría los retornos del activo i . No obstante, hay estudios que muestran lo contrario, el alfa resulta ser distinto de cero. Para una profundización en el tema remítase a Jensen (1967) quien abordó el tema.

2.2. Dominancias Estocásticas

Una alternativa para la selección de opciones de inversión, está dada por la evaluación por pares acorde a Dominancias Estocásticas de Primer Orden y Segundo Orden, respectivamente. Los criterios de dominancia estocásticas resultan útiles ya que estos circunscriben situaciones, en las cuales, las clasificaciones entre los prospectos riesgosos son libres de preferencia o pueden definirse independientemente de las compensaciones específicas implícitas en la forma funcional de la

utilidad de un agente⁶. Así, a continuación se enunciarán definiciones útiles, cuyas demostraciones pueden ser encontradas en Danthine & Donaldson (2015):

Definición 1. Permita $F_A(x)$ y $F_B(x)$, respectivamente, representar las funciones de distribución acumulativas de dos variables aleatorias (por ejemplo, pagos en efectivo), que sin pérdida de generalidad asumen valores en el intervalo $[a, b]$. Se dice que $F_A(x)$ domina estocásticamente en primer orden (FSD⁷) a $F_B(x)$ si y solo si $F_A(x) \leq F_B(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

En la ilustración 1 se observa gráficamente lo que es la dominancia estocástica de primer orden. En un sentido pragmático se dice que $F_A(x)$ domina estocásticamente en primer orden a $F_B(x)$, siempre que F_A se encuentre por debajo de F_B .

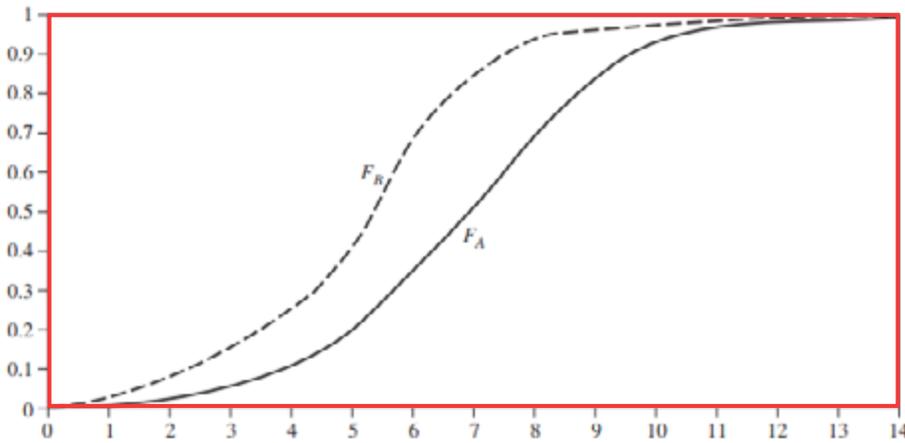


Figura 1. Representación General de FSD.

Fuente: Danthine & Donaldson (2015).

⁶ Típicamente se asumiría que el agente es averso al riesgo por lo que la función de utilidad Von Neuman-Morgernstern resultaría adecuada.

⁷ Por sus siglas en inglés: *First-Order Stochastic Dominance*.

Definición 2. Sean $F_A(x)$ y $F_B(x)$ dos distribuciones de probabilidad acumulativas para pagos aleatorios en $[a, b]$. Se dice que $F_A(x)$ domina estocásticamente en segundo orden (SSD⁸) a $F_B(x)$ si y solo si para cualquier x :

$$\int_{-\infty}^x [F_B(t) - F_A(t)] dt \geq 0$$

En otras palabras, la distribución de probabilidad acumulativa de F_B siempre tiene que ser superior a la distribución de probabilidad acumulativa de F_A ; en este caso, la opción de inversión domina estocásticamente en segundo orden la opción de inversión B .

Si bien, es difícil encontrarse con una *FSD* de una opción de inversión con respecto a otra, para el caso de una *SSD* no lo es tanto; esto, debido a que se tiene en cuenta la probabilidad acumulada de los posibles valores de cada una de las opciones que están siendo comparadas. Contando con las probabilidades acumuladas, la diferencia y, en especial, la persistencia del signo de dicha diferencia, permitirían establecer *SSD*. La condición es que la diferencia siempre sea positiva, en cuyo caso, la opción que está siendo restada (sustraendo) domina estocásticamente en segundo orden (*SSD*) a la opción restada (minuyendo).

2.3. Diversificación

En la sección 2.1 se expuso uno de los resultados derivados de Harry Markowitz (1952): el cálculo de los retornos esperados de un activo cualquiera. A continuación, se expondrá la metodología que permite diversificar el portafolio, de tal manera, que alcance uno óptimo, contando con $N \geq 2$ activos.

Si bien, para la diversificación también se cuenta con el modelo Black-Litterman (1991b, 1991a), se opta por una diversificación a la Markowitz. Este autor en su artículo *Portfolio Selection*, introduce el concepto de media varianza como criterio para la selección óptima de activos

⁸ Por sus siglas en inglés.

que componen un portafolio en cuestión, dejando entrever también una frontera eficiente⁹. Posteriores trabajos como los de Sharpe (1964) aportarían con la línea de mercados de capitales (CML¹⁰ por sus siglas en inglés); Sharpe, dicho sea de paso, da pie a lo que sería el β y su obtención mediante regresiones. En Lintner (1965) es visible la frontera eficiente en conjunto con la CLM, incorporando un activo libre de riesgo. Lo anterior se resume de forma práctica en la ilustración 2.

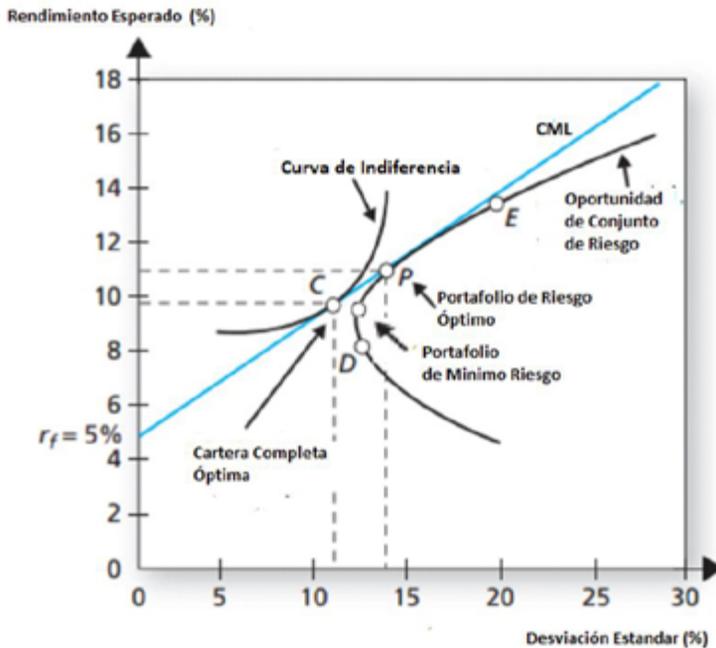


Figura 2. Frontera Eficiente y Portafolios óptimos y de mínima varianza.

Fuente: Bodie, Kane, & Marcus (2014).

⁹ En el presente contexto, una frontera eficiente hace referencia al espacio del plano cartesiano en donde se localizan todos los portafolios que cumplen con el criterio de máximo rendimiento con el mínimo riesgo posible. Véase Danthine & Donaldson (2015)

¹⁰ *Capital Market Line.*

Al igual que para la determinación del retorno esperado, en la presente sección prescindimos de un activo libre de riesgo. En general, se siguen los lineamientos de Danthine & Donaldson (2015). A continuación, se expone el desarrollo matemático para la determinación de un portafolio de frontera¹¹, el portafolio de mínima varianza y el portafolio óptimo. La simbología en negrita denota matrices o vectores columna. Suponga un portafolio cualquiera como \mathbf{w} , el cual, es caracterizado como portafolio de frontera \mathbf{w}_p , si y solo si, se resuelve:

$$\min_{\mathbf{w}} \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} \quad (8)$$

$$(\lambda) \text{ s. t. } \mathbf{w}^T \mathbf{e} = E \quad \left(\sum_{i=1}^N w_i E(\tilde{r}_i) = E(\tilde{r}_p) = E \right) \quad (9)$$

$$(\gamma) \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1 \quad \left(\sum_{i=1}^N w_i = 1 \right) \quad (10)$$

El superíndice \tilde{r}_i denota una matriz traspuesta, \mathbf{e} denota un vector columna de los retornos esperados para los N activos, $\mathbf{1}$ representa un vector columna de unos, finalmente λ y γ son multiplicadores lagrangianos. No se observan restricciones de no negatividad; es decir, son permitidas ventas en corto, que, como se verá más adelante, es una característica que facilita encontrar la frontera eficiente de nuestras acciones.

El problema puede ser resuelto como una función de $\{\mathbf{w}, \lambda, \gamma\}$, donde L es el lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} + \lambda (\mathbf{E} - \mathbf{w}^T \mathbf{e}) + \gamma (\mathbf{1} - \mathbf{w}^T \mathbf{1}) \quad (11)$$

11 Un portafolio de frontera es aquel que muestra la mínima varianza entre todos los portafolios factibles con el mismo retorno esperado.

Considerando lo anterior, el óptimo W_p , λ y γ debe satisfacer las ecuaciones (12) a (14), las cuales, son las condiciones de primer orden necesarias y suficientes.

$$\frac{\partial L}{\partial w} = Vw - \lambda e - \gamma \mathbf{1} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = E - w^T e = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = \mathbf{1} - w^T \mathbf{1} = 0 \quad (14)$$

A través de las ecuaciones se logra obtener una caracterización intuitiva de las proporciones del portafolio óptimo que posteriormente se encontrará.

De la ecuación 12, $Vw_p = \lambda e + \gamma \mathbf{1}$ o

$$w_p = \lambda V^{-1} e + \gamma V^{-1} \mathbf{1}, \quad \& \quad (15)$$

$$e^T w_p = \lambda(e^T V^{-1} e) + \gamma(e^T V^{-1} \mathbf{1}) \quad (16)$$

Ya que $e^T w_p$, también se tiene, de la ecuación (13), que

$$E(r_p) = \lambda(e^T V^{-1} e) + \gamma(e^T V^{-1} \mathbf{1})$$

De la ecuación 15 se tiene,

$$\mathbf{1}^T w_p = w_p^T \mathbf{1} = \lambda(\mathbf{1}^T V^{-1} e) + \gamma(\mathbf{1}^T V^{-1} \mathbf{1})$$

=1 (Por la ecuación 13)

$$\mathbf{1} = \lambda(\mathbf{1}^T V^{-1} \mathbf{e}) + \gamma(\mathbf{1}^T V^{-1} \mathbf{1})$$

Hay que notar que las ecuaciones 17 y 18 son dos ecuaciones escalares en las cuales λ y γ son desconocidos. Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se obtiene:

$$\lambda = \frac{CE - A}{D} \quad \gamma = \frac{B - AE}{D} \quad (19)$$

Donde:

$$A = \mathbf{1}^T V^{-1} \mathbf{e} = \mathbf{e}^T V^{-1} \mathbf{1}$$

$$B = \mathbf{e}^T V^{-1} \mathbf{e} > 0$$

$$C = \mathbf{1}^T V^{-1} \mathbf{1}$$

$$D = BC - A^2$$

Si se considera el hecho de que la inversa de una matriz definida positiva es la misma matriz. Se puede demostrar que D , de igual manera, es estrictamente positiva. Sustituyendo la ecuación (19) en la ecuación (15), resulta:

$$\begin{aligned} w_p &= \frac{CE - A}{D} V^{-1} \mathbf{e} + \frac{B - AE}{D} V^{-1} \mathbf{1} \\ &= \frac{1}{D} [B(V^{-1} \mathbf{1}) - A(V^{-1} \mathbf{e})] + \frac{1}{D} [C(V^{-1} \mathbf{1})] E \end{aligned} \quad (20)$$

La ecuación (20) se puede expresar como:

$$w_p = g + hE$$

Debido a que las condiciones de primer orden, enunciadas anteriormente, son una caracterización necesaria y suficiente para que w_p represente un portafolio de frontera con un retorno esperado igual a E , cualquier portafolio de frontera puede ser representado por la ecuación (20). Hay que mencionar que los portafolios eficientes son aquellos para los cuales su E excede al retorno esperado del portafolio de mínimo riesgo.

Danthine & Donaldson (2015), exponen proposiciones que permiten el establecimiento de la frontera eficiente, portafolios: óptimo y de mínima varianza; estas se muestran a continuación.

Proposición 1. El conjunto entero de portafolios de frontera puede ser generado por (las combinaciones derivadas de) g y $g+h$.

Proposición 2. El portafolio de frontera puede ser descrito como combinaciones afines de cualesquiera dos portafolios (por ejemplo:) de frontera, no solo por los portafolios de frontera g y $g+h$

Para cualquier portafolio sobre la frontera,

$$\sigma^2(\tilde{r}_p) = [g + hE(\tilde{r}_p)]^T V [g + hE(\tilde{r}_p)] \quad (21)$$

En donde g y h fueron definidas anteriormente.

$$\sigma^2(\tilde{r}_p) = \frac{C}{D} \left(E(\tilde{r}_p) - \frac{A}{C} \right)^2 + \frac{1}{C} \quad (22)$$

En donde A, C y D son constantes que se definieron anteriormente. Además, y ya que $C > 0$, $D > 0$, se puede identificar:

- a) El retorno esperado del portafolio de mínimo riesgo es A/C ;
- b) La varianza del portafolio de mínimo riesgo está dado por $1/C$;
- c) La ecuación 22 es la ecuación de una parábola con un vértice $(1/C, A/C)$ en el espacio retorno/varianza y de una hipérbola en el espacio retorno/desviación estándar.

En base a lo anterior, se encuentra la frontera eficiente, portafolio de mínimo riesgo y portafolio óptimo o de mercado.

No obstante, la parte anterior requiere contar con \mathbf{V} , la cual, denota la matriz de varianza-covarianza. Ésta matriz es calculada directamente de los retornos históricos. Para ello, adoptamos la metodología de Benninga (2014), en base a la ecuación (23).

$$V = \frac{F^T F}{M - 1} \quad (23)$$

En donde \mathbf{F} es la matriz de excesos de Retornos¹² de los activos pertenecientes al portafolio inicial y \mathbf{M} es el número de observaciones de los retornos.

12 Con respecto a la media.

2.4. Encontrando dos Portafolios cualesquiera

En las secciones anteriores se enunció parcialmente la teoría que respalda la creación de portafolios sobre la frontera, así como la creación de la matriz varianza-covarianza.

En la presente sección se expone la metodología para la creación de dos portafolios cualesquiera, que al combinarlos permita delinear tanto los portafolios de frontera como la frontera eficiente. Cabe recalcar que cada uno de los portafolios (p & q) contiene, dentro de sí, aunque en distintas proporciones, a los activos nombrados inicialmente, a saber: BCH, BSANTANDER, FALABELLA & PARAUCO.

En línea con Benninga (2014) y Danthine & Donaldson (2015) e y V representan el vector de retornos y la matriz varianza-covarianza, respectivamente. Por lo tanto, considere una constante cualquiera, la cual, se resta de cada uno de los retornos de los activos; es decir, existe un vector:

$$e - c = \begin{bmatrix} E(r_1) - c \\ E(r_2) - c \\ \vdots \\ E(r_N) - c \end{bmatrix} \quad (24)$$

Permita z ser el vector que resuelve el sistema de ecuaciones $e-c=Vz$. La solución para obtener un portafolio x sobre la frontera es:

$$z = V^{-1}\{e - c\} \quad (25)$$

$$x = \{x_1, \dots, x_N\} \quad (26)$$

Donde:

$$X_i = \frac{z_i}{\sum_{j=1}^N z_j} \quad (27)$$

Es decir, en este caso x_i presenta el peso de cada uno de los activos dentro de un portafolio específico, dada una constante; mientras que x representaría a p y q (es decir, portafolios cualesquiera). Una vez determinados los pesos de los activos, encontrar el retorno de cada portafolio se resuelve mediante $e^T x$. Benninga (2014) recomienda que uno de los portafolios a obtener tenga un $c=0$, esta recomendación fue acogida. En otro de los portafolios se utilizó¹³ un $c=0.07$. Para cada uno de los casos descritos se denominaron a los portafolios encontrados, respectivamente, p y q . Ya con los portafolios anteriores y en base a las proposiciones 1 y 2 expuestas con anterioridad, se justifica la creación de los portafolios de la frontera de activos, así como de la frontera eficiente.

13 La constante a utilizar es arbitraria.

2.5. Combinando Portafolios

Una vez encontrados p y q resulta sencillos combinarlos. La combinación se la puede llevar a cabo en base a la ecuación (27) (Danthine & Donaldson, 2015).

$$E(r_{\text{portafolio}}) = \alpha E(r_p) + (1 - \alpha) E(r_q) \quad (28)$$

Variando α a intervalos lo suficientemente cortos, se pueden obtener literalmente infinitos portafolios. En el presente trabajo inicialmente se optó por un $\alpha=7$ y variaciones de 0.05. Lo anterior con el propósito de obtener los puntos necesarios y suficientes para una delineación de frontera adecuada y gráficamente aceptable.

3. RESULTADOS

Para el cálculo de los distintos tópicos se utilizaron las series históricas de los precios de cada una de las acciones correspondientes a los años 2015, 2016 y 2017.

3.1. CAPM

Para la estimación de retornos esperados de las distintas acciones bajo el modelo CAPM, se tomó como r_m el Índice General de Acciones (IGPA) de la bolsa de Santiago. En lo demás los resultados, se atienen a lo expuesto en la sección Metodología y Marco Teórico. En la tabla 1 se presentan los resultados CAPM de cada una de las acciones expuestas.

Tabla 1. Resultados CAPM para las distintas Acciones.

ACCIÓN	COEFICIENTES	ERROR TÍPICO	ESTADÍSTICO T	INFERIOR 95%	SUPERIOR 95%
BCH	0,000	0,000	0,394	-0,001	0,001
Beta	1,017***	0,050	20,405	0,919	1,114
BSANTANDER	0,000	0,000	0,831	0,000	0,001
Beta	1,080***	0,046	23,481	0,990	1,171
FALABELLA	0,000	0,000	0,180	-0,001	0,001
Beta	1,008	0,048	20,954	0,914	1,103
PARAUCO	0,000	0,000	0,700	-0,001	0,001
Beta	0,683***	0,063	10,835	0,559	0,806

Nota: *, **, ***; denotan, respetivamente, significancia del 10%, 5% y 1%.

Elaboración: Los autores.

Se observa que la acción más sensible al mercado es la de Banco de Chile (BCH), mientras que, la acción de Parque Arauco (PARAUCO) es la menos sensible. Hay que resaltar el hecho de que todas las betas son significativas al 1% y que para todos los casos el R^2 *ajustado* fue superior a 0.8. Cabe mencionar que la significancia es resultado del p-value o valor-p, a través de la prueba t-student. Lo anterior pone de manifiesto que ante un movimiento de la economía la más afectada sería la acción del Banco de Chile; mientras que, la acción de PARAUCO sería la menos afectada. Sin embargo, hay que decir que la mayor parte de las acciones tiene un comportamiento similar al mercado; es decir, se mueve acorde a él, en una proporción bastante cercana a uno a uno.

3.2. Dominancias Estocásticas

3.2.1. FSD

En la ilustración 3 se observan los gráficos de las funciones de distribución acumulativas de las distintas acciones. Las comparaciones se las realizó por pares.

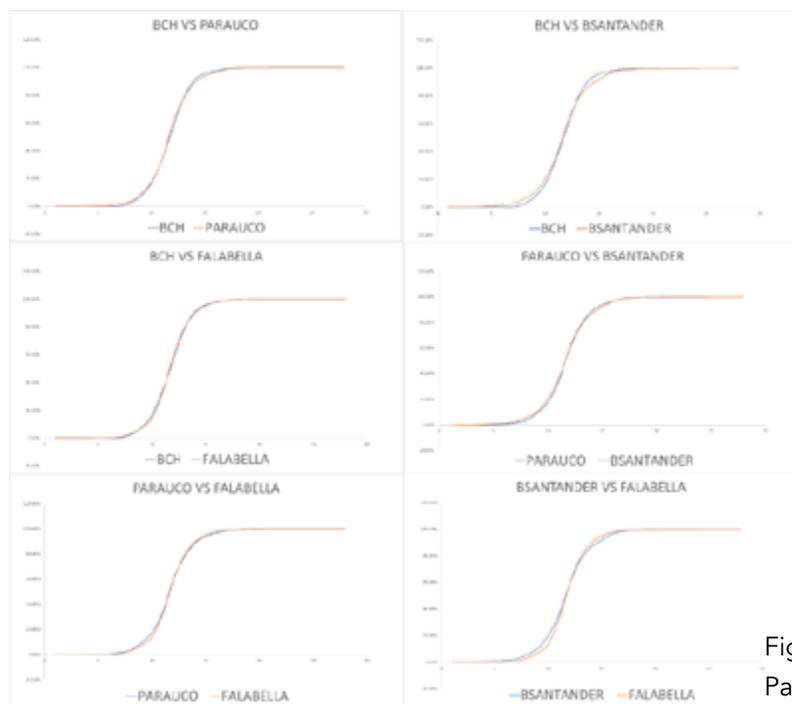


Figura 3. FSD de los Posibles Pares de Acciones.

Como se mencionó anteriormente, la FSD se presenta siempre que el gráfico de la función de distribución acumulativa de una acción, se encuentre por debajo del gráfico de la función distribución acumulativa de su respectiva acción par en comparación. Esta condición no se presenta en ninguna de los casos. Cabe mencionar, de haberse dado la mencionada condición, la acción que siempre se encuentra por debajo sería la seleccionada como opción de inversión, a costa de la que siempre se encuentra en la parte superior.

La lógica tras las afirmaciones anteriores es la siguiente: Ya que la función de distribución acumulativa de una opción de inversión siempre se encuentra por debajo de la respectiva función de distribución acumulativa de otra opción de inversión, dicha opción de inversión es más probable que tome valores (retornos) más altos que la segunda opción. De ahí que se preferirá siempre invertir en la primera opción que en la segunda (Danthine & Donaldson, 2015).

Generalmente, sino imposible, es bastante improbable encontrar una FSD. Implicaría una situación bastante parecida a dominancia estado por estado – en donde una opción es mejor a otra en todos los estados de la naturaleza-. Sin embargo, las situaciones macro y particulares de cada una de las acciones parecieran no dar cabida a una FSD en la vida real.

3.2.2. SSD

Los resultados de las diferencias de las distribuciones de probabilidad acumulativas se observan en la sección anexos. Solo en dos casos se observan la existencia de Dominancia Estocástica de Segundo Orden, a saber: FALABELLA domina estocásticamente en Segundo Orden tanto a PARAUCO como a BSANTANDER. Para el resto de casos comparados, no existe ningún tipo de Dominancias. Lo anterior plantearía la preferencia de FALABELLA por sobre PARAUCO y/o BSANTANDER. Es decir, dadas las opciones de inversión FALABELLA y PARAUCO, el inversor debería invertir en FALABELLA en lugar de en PARAUCO. De la misma forma, dadas las opciones de inversión FALABELLA y BSANTANDER, el inversor debería invertir en FALABELLA en lugar de en BSANTANDER.

3.3. Diversificación

3.3.1. Parámetros

Para el caso de la diversificación a la Markowitz, a continuación, se presentan los resultados en base a la metodología descrita. En la ecuación (29) se exponen las matrices de retornos y varianza-covarianza para las acciones: BCH, BSANTANDER, FALABELLA y PARAUCO.

$$e = \begin{bmatrix} 0,00067286 \\ 0,00083243 \\ 0,00059124 \\ 0,00070773 \end{bmatrix}; \quad V = \begin{bmatrix} \mathbf{0,00015} & 0,00007 & 0,00005 & 0,00003 \\ 0,00007 & \mathbf{0,00014} & 0,00005 & 0,00003 \\ 0,00005 & 0,00005 & \mathbf{0,00014} & 0,00004 \\ 0,00003 & 0,00003 & 0,00004 & \mathbf{0,00017} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Con los datos anteriores es posible encontrar A, B, C y D , visible en la tabla 2; y, en consecuencia, g & h , véase ecuación (30).

Tabla 2. Parámetros A, B, C & D .

PARÁMETRO	RESULTADO
A	9.899118
B	0.007289
C	141166.810060
D	5.266222

Elaboración: Autores.

$$w = \begin{bmatrix} 1.27605 \\ -2.88827 \\ 2.60172 \\ 0.01051 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1496.94810 \\ 4476,33233 \\ -3344.63901 \\ 365.25479 \end{bmatrix} E(r_p) \quad (30)$$

La ecuación 30 resulta fundamental para la creación de la frontera eficiente debido a que si contamos con un retorno cualquiera $E(r_p)$ se puede obtener la matriz de pesos (w) de cada una de las acciones. Al contar con $E(r_p)$ se puede establecer la varianza y, por ende, la desviación estándar, de cada uno los portafolios, en base a (22) o (31). Acorde a la ilustración 2, el eje de las ordenadas representa a $E(r_p)$, mientras que, el de las abscisas a la desviación estándar. Por lo tanto, lo mencionado anteriormente permite graficar la frontera eficiente y los portafolios de frontera.

3.3.2. Dos portafolios cualesquiera

Acorde a la sección 2.3., se crearon dos portafolios, los cuales, posteriormente, se combinaron para crear la frontera eficiente. El primer portafolio contó con un $c=0.07$, mientras que, el segundo con un $c=0$; este último, puede interpretarse como si en efecto no se contara con un c . El primer portafolio se denominó p , mientras que, el segundo se denominó q . Tanto p como q constan, respectivamente, en las tablas 3 y 4.

Tabla 3. Portafolio p

Descriptiva		Pesos de los Activos	
c (utilizada)	0.07	BCH	0.23061431
$E(r_p)$	0.00069838	BSANTANDER	0.23788738
Varianza	0.00007059	FALABELLA	0.26590146
Desviación	0.00840166	PARAUCO	0.26559685

Elaboración: Los Autores.

Tabla 4. Portafolio q.

Descriptiva		Pesos de los Activos	
c(utilizada)	0	BCH	0.1738344
E(rq)	0.00073631	BSANTANDER	0.4076765
Varianza	0.00007438	FALABELLA	0.1390379
Desviación	0.00862444	PARAUCO	0.2794511

Elaboración: Los Autores.

Ya con los dos portafolios y en línea con la ecuación (28) y las secciones 3.2. y 2.4., es posible obtener portafolios de frontera adicionales. De lo anterior se obtuvieron 500 portafolios, de estos portafolios se obtuvieron sus respectivos retornos esperados $E(r_i)$ y varianzas acordes a las ecuaciones (28) y (31), respectivamente.

$$w^T V w \quad (31)$$

3.3.3. Portafolios Importantes y CLM

Para el caso del portafolio de mercado se puede considerar que de acuerdo a Benninga (2014), si para encontrar un determinado portafolio se utiliza un $c = rf$, entonces, se ha encontrado el portafolio de mercado. Dado que en el presente trabajo prescindimos de un rf o lo que es lo mismo $rf=0$, entonces, el portafolio p representaría también al portafolio de mercado. Véase tabla 4.

El retorno y varianza del portafolio de mínima varianza se obtuvo mediante A/C y $1/C$, respectivamente. En la tabla 5 constan los detalles del portafolio de mínima varianza.

Tabla 5. Portafolio de Mínima Varianza

Descriptiva		Pesos de los Activos	
E(rp)	0.0007	BCH	0.23004752
Varianza	0.00007	BSANTANDER	0.23958225
Desviación	0.00840	FALABELLA	0.26463509
		PARAUCO	0.26573515

Elaboración: Los Autores.

Por su parte, la CLM matemáticamente está dada por $E(r_i) = rf + \beta(E_{RM} - rf)$; no obstante, se optará por otro enfoque. Considerando que el ratio de Sharpe¹⁴ para todos los puntos sobre la CLM, es decir, para todos los portafolios óptimos, debe ser el mismo ratio de Sharpe que el del portafolio de mercado, es posible plantear la ecuación (32).

$$Sharpe(r_{iCML}) = Sharpe(r_{mercado}) = Sharpe(r_q) \quad (32)$$

En donde $iCML$ representa a un portafolio cualesquiera de la línea de mercado de capitales. Para el presente caso la ratio de Sharpe del portafolio de Mercado es 0.085374351.

Por lo tanto, para cualquier $iCML$ su desviación, está dada por la ecuación (33).

$$\sigma_{iCML} = \frac{E(r_{iCML})}{0.085374351} \quad (33)$$

14 Véase Bodie et al. (2014).

Ya que se cuenta con hasta 500 retornos, resulta sencillo encontrar las respectivas desviaciones de cada uno de los portafolios; y, con ello, se obtienen los puntos necesarios para delinear la CLM. En la ilustración 2 se presenta la frontera de portafolios, la frontera eficiente, el portafolio de mercado, portafolio de mínima varianza y la CML, resultado del presente trabajo.

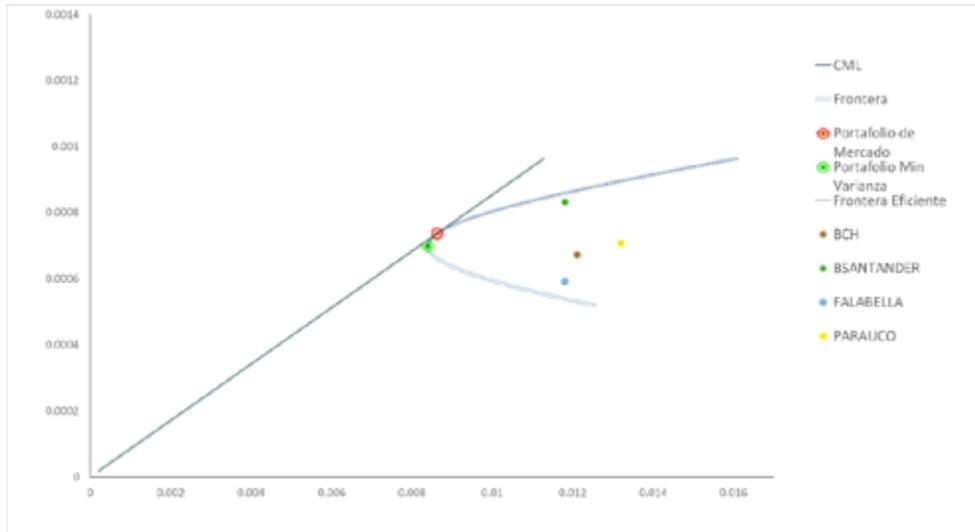


Figura 4. Diversificación a la Markowitz

4. DISCUSIÓN

En la praxis se toma como proxy del portafolio de mercado al índice general de acciones de la respectiva bolsa que, para el presente caso, es el IGPA; sin embargo, el índice no es más que una aproximación del verdadero portafolio, por lo que cabría esperar una diferencia entre la estadística descriptiva del IGPA y del portafolio de mercado obtenido por el estudio. Lo anterior, efectivamente, ocurre. Véase tabla 6.

Tabla 6. IGPA VS Portafolio de Mercado.

Descriptiva	IGPA	Portafolio de Mercado
E(R)	0.00053	0.00074
Varianza	0.00005	0.00007
Desviación	0.00713	0.00862
Sharpe	0.07376	0.08537

Elaboración: Los Autores.

La situación anterior podría diferir, más aún, si se considera que, en efecto, las acciones utilizadas en el presente trabajo no representan el total de la economía chilena. Que se consideren todas las acciones de la bolsa de Santiago, tampoco remediaría el asunto debido a que es de suponer que existen sectores o subsectores, económicos no representados por las acciones tranzadas en bolsa.

Esta situación deja entrever que tampoco la praxis de CAPM entregaría el retorno esperado real de una acción o activo, aunque, en teoría, sí que lo hace. No obstante, y a pesar de las anomalías enunciadas, resulta útil como marco de referencia ante la ausencia de herramientas con un sustento teórico fuerte y una forma sucinta mejor. Recuerde, la ventaja de un modelo no es su representación exacta de la realidad sino la factibilidad de comprenderla mejor, con las limitantes del caso.

Por su lado, las dominancias estocásticas plantean una alternativa teórica de selección; si bien, en la praxis muy difícilmente se encontrará una FSD y no resulta fácil encontrar una SSD, las nociones tras ellas convienen a la hora de comparar pares de opciones de acciones. Una FSD o una SSD generaría que el inversor y, con él, el resto del mercado se avoquen a adquirir la acción más conveniente.

La diversificación a la Markowitz, por su parte, permite sopesar un número indefinido de acciones, y determinar el grado de participación de cada una de ellas dentro del portafolio del inversor. Además, se permiten ventas en corto, lo cual, facilitaría apalancar una mayor adquisición del resto de acciones. A nivel de mercado, una diversificación abarcando todas las acciones listadas en una bolsa resulta cuando menos dificultosa, dados los posibles costos de transacción y las pequeñas proporciones de cada una de las acciones. En todo caso, lo más factible es adquirir un índice de mercado que refleje más o menos el desempeño de la respectiva bolsa. Si bien, este no supe al portafolio teórico de mercado, pragmáticamente resulta más conveniente.

El presente artículo aplicó la teoría fundamentada en el trabajo de Harry Markowitz, así como de aportes posteriores. A nivel de las acciones presentadas y basadas en el beta obtenido acorde a CAPM, ninguna de dichas acciones parece tener una reacción considerable respecto al mercado, es más, para el caso en particular (PARAUCO), su sensibilidad respecto a los golpes del mercado, es menor a uno. Por su parte, se observó que en ningún caso se dio FSD, lo que generalmente ocurre. Por su parte, sí que existió SSD, por parte de FABELLA con respecto a PARAUCO y BSANTANDER. Sin embargo, para el resto de casos, no se presentó SSD. Esta circunstancia limitaría la utilidad de FSD y SSD.

En cuanto a la diversificación, destaca el hecho de que el IGPA o cualquier índice general de acciones, no representan al portafolio de mercado teórico. Esto se comprobó al comparar las estadísticas descriptivas del IGPA con el portafolio de mercado obtenido. Sin embargo, hay que mencionar que ni siquiera nuestro portafolio de mercado representa al verdadero portafolio de mercado teórico, debido a que en su composición no se contemplan a todas las acciones de la bolsa, ni mucho menos a todos los activos de la economía. A pesar de ello, nuestro portafolio sí entregó una mejor rentabilidad y un menor riesgo

que el IGPA. Hay que mencionar que, si bien no hubo restricciones de no negatividad, en ninguno de los portafolios importantes (de mercado, mínima varianza) se presentaron ventas cortas.

El presente *paper*, presentó un estudio de aplicativo. Dando a conocer pros y contras, destacando su aspecto referencial para la toma de decisiones financieras.

1. Referencias bibliográficas

- Benninga, S. (2014). *Financial Modeling* (Fourth ed.). Cambridge: The MIT Press.
- Black, F., & Litterman, R. (1991a). Asset Allocation : Combining Investor View. *The Journal of Fixed Income*, 1(2), 7–18.
- Black, F., & Litterman, R. (1991b). *Global Portfolio Optimization*. Financial Analysts Journal.
- Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, A. (2014). *Invesments* (10th ed.) McGrawHill
- Danthine, J., & Donaldson, J. B. (2015). *Intermediate Financial Theory* (Third). Elsevier.
- Fama, E. F., & French, K. R. (1993). *Common risk factors in the returns on stocks and bonds*. Journal of Financial Economics, 33(1), 3–56. [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(93\)90023-5](https://doi.org/10.1016/0304-405X(93)90023-5)
- Fama, E. F., & French, K. R. (2015). *A five-factor asset pricing model*. Journal of Financial Economics, 116(1), 1–22. <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2014.10.010>
- Jensen, M. C. (1967). *The Performance Of Mutual Funds In The Period 1945-1964*. Journal of Finance, 23(2), 389–416.
- Lintner, J. (1965). *The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets*. The Review of Economics and Statistics, 47(1), 13. <https://doi.org/10.2307/1924119>
- Markowitz, H. (1952). *Portfolio Selection*. The Journal of Finance, 7(1), 77–91. <https://doi.org/10.1144/GSL.JGS.1861.017.01-02.11>
- Mossin, J. (1966). *Equilibrium in a Capital Asset Market*. Econometrica, 34(4), 768–783.
- Roll, R. (1977). A critique of the asset pricing theory's tests. Part I: On Past Potential Testability of the Theory. Journal of Financial Economics., 4, 129–176.
- Sharpe, W. F. (1964). *Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk*. The Journal of Finance, XIX (3), 425–442. <https://doi.org/10.1017/S0043887113000221>
- Tobin, J. (1958). Liquidity Preference as Behavior Towards Risk. The Review of Economic Studies, 25(2), 65–86.
- Wooldridge, J. M. (2010). *Introducción a la Econometría* (4th ed.). CENGAGE.

Anexos

Tabla 7. SSD BCH vs PARAUCO

Clase	$\int_{-\infty}^x f_{BCH}(t)dt$	$\int_{-\infty}^x F_{BCH}(t)dt$	$\int_{-\infty}^x f_{PARAUCO}(t)dt$	$\int_{-\infty}^x F_{PARAUCO}(t)dt$	$\int_{-\infty}^x [F_{BCH}(t) - F_{PARAUCO}(t)]dt$	
-0.06685	0.00134	0.00134	0.00000	0.00000	0.00134	OK
-0.06056	0.00134	0.00267	0.00000	0.00000	0.00267	OK
-0.05426	0.00134	0.00401	0.00000	0.00000	0.00401	OK
-0.04797	0.00134	0.00534	0.00134	0.00134	0.00401	OK
-0.04167	0.00134	0.00668	0.00267	0.00401	0.00267	OK
-0.03538	0.00134	0.00801	0.00401	0.00801	0.00000	OK
-0.02909	0.00134	0.00935	0.01469	0.02270	-0.01335	NO
-0.02279	0.02270	0.03204	0.03338	0.05607	-0.02403	NO
-0.01650	0.07210	0.10414	0.09079	0.14686	-0.04272	NO
-0.01020	0.16422	0.26836	0.17490	0.32176	-0.05340	NO
-0.00391	0.33912	0.60748	0.33645	0.65821	-0.05073	NO
0.00239	0.56075	1.16822	0.59947	1.25768	-0.08945	NO
0.00868	0.77704	1.94526	0.77437	2.03204	-0.08678	NO
0.01497	0.90654	2.85180	0.88518	2.91722	-0.06542	NO
0.02127	0.95728	3.80908	0.93858	3.85581	-0.04673	NO
0.02756	0.97597	4.78505	0.96529	4.82109	-0.03605	NO
0.03386	0.99065	5.77570	0.98665	5.80774	-0.03204	NO
0.04015	0.99599	6.77170	0.99332	6.80107	-0.02937	NO
0.04645	0.99866	7.77036	0.99733	7.79840	-0.02804	NO
0.05274	0.99866	8.76903	0.99733	8.79573	-0.02670	NO
0.05904	0.99866	9.76769	1.00000	9.79573	-0.02804	NO
0.06533	0.99866	10.76636	1.00000	10.79573	-0.02937	NO
0.07162	0.99866	11.76502	1.00000	11.79573	-0.03071	NO
0.07792	0.99866	12.76368	1.00000	12.79573	-0.03204	NO
0.08421	0.99866	13.76235	1.00000	13.79573	-0.03338	NO
0.09051	0.99866	14.76101	1.00000	14.79573	-0.03471	NO
0.09680	0.99866	15.75968	1.00000	15.79573	-0.03605	NO
y mayor...	1.00000	16.75968	1.00000	16.79573	-0.03605	NO

Tabla 8. SSD BCH vs BSANTANDER

Clase	$\int_{-\infty}^x f_{BCH}(t)dt$	$\int_{-\infty}^x F_{BCH}(t)dt$	$\int_{-\infty}^x f_{BSANTANDER}(t)dt$	$\int_{-\infty}^x F_{BSANTANDER}(t)dt$	$\int_{-\infty}^x [F_{BCH}(t) - F_{BSANTANDER}(t)]dt$	
-0.06685	0.00134	0.00134	0.00000	0.00000	0.00134	OK
-0.06056	0.00134	0.00267	0.00134	0.00134	0.00134	OK
-0.05426	0.00134	0.00401	0.00134	0.00267	0.00134	OK
-0.04797	0.00134	0.00534	0.00401	0.00668	-0.00134	NO
-0.04167	0.00134	0.00668	0.00801	0.01469	-0.00801	NO
-0.03538	0.00134	0.00801	0.01335	0.02804	-0.02003	NO
-0.02909	0.00134	0.00935	0.02270	0.05073	-0.04139	NO
-0.02279	0.02270	0.03204	0.05741	0.10814	-0.07610	NO
-0.01650	0.07210	0.10414	0.10280	0.21095	-0.10681	NO
-0.01020	0.16422	0.26836	0.20294	0.41389	-0.14553	NO
-0.00391	0.33912	0.60748	0.35915	0.77303	-0.16555	NO
0.00239	0.56075	1.16822	0.58879	1.36182	-0.19359	NO
0.00868	0.77704	1.94526	0.76636	2.12817	-0.18291	NO
0.01497	0.90654	2.85180	0.86515	2.99332	-0.14152	NO
0.02127	0.95728	3.80908	0.91856	3.91188	-0.10280	NO
0.02756	0.97597	4.78505	0.96395	4.87583	-0.09079	NO
0.03386	0.99065	5.77570	0.98531	5.86115	-0.08545	NO
0.04015	0.99599	6.77170	0.99065	6.85180	-0.08011	NO
0.04645	0.99866	7.77036	0.99599	7.84780	-0.07744	NO
0.05274	0.99866	8.76903	0.99599	8.84379	-0.07477	NO
0.05904	0.99866	9.76769	0.99733	9.84112	-0.07343	NO
0.06533	0.99866	10.76636	0.99733	10.83845	-0.07210	NO
0.07162	0.99866	11.76502	0.99733	11.83578	-0.07076	NO
0.07792	0.99866	12.76368	0.99733	12.83311	-0.06943	NO
0.08421	0.99866	13.76235	0.99866	13.83178	-0.06943	NO
0.09051	0.99866	14.76101	0.99866	14.83044	-0.06943	NO
0.09680	0.99866	15.75968	0.99866	15.82911	-0.06943	NO
y mayor...	1.00000	16.75968	1.00000	16.82911	-0.06943	NO

Tabla 9. SSD BCH vs FALABELLA

Clase	$\int_{-\infty}^x f_{BCH}(t)dt$	$\int_{-\infty}^x F_{BCH}(t)dt$	$\int_{-\infty}^x f_{FALABELLA}(t)dt$	$\int_{-\infty}^x F_{FALABELLA}(t)dt$	$\int_{-\infty}^x [F_{BCH}(t) - F_{FALABELLA}(t)]dt$	
-0.06685	0.00134	0.00134	0.00000	0.00000	0.00134	OK
-0.06056	0.00134	0.00267	0.00000	0.00000	0.00267	OK
-0.05426	0.00134	0.00401	0.00000	0.00000	0.00401	OK
-0.04797	0.00134	0.00534	0.00000	0.00000	0.00534	OK
-0.04167	0.00134	0.00668	0.00134	0.00134	0.00534	OK
-0.03538	0.00134	0.00801	0.00267	0.00401	0.00401	OK
-0.02909	0.00134	0.00935	0.00668	0.01068	-0.00134	NO
-0.02279	0.02270	0.03204	0.03071	0.04139	-0.00935	NO
-0.01650	0.07210	0.10414	0.06943	0.11081	-0.00668	NO
-0.01020	0.16422	0.26836	0.13885	0.24967	0.01869	OK
-0.00391	0.33912	0.60748	0.32310	0.57276	0.03471	OK
0.00239	0.56075	1.16822	0.59012	1.16288	0.00534	OK
0.00868	0.77704	1.94526	0.78772	1.95060	-0.00534	NO
0.01497	0.90654	2.85180	0.89453	2.84513	0.00668	OK
0.02127	0.95728	3.80908	0.95060	3.79573	0.01335	OK
0.02756	0.97597	4.78505	0.97864	4.77437	0.01068	OK
0.03386	0.99065	5.77570	0.99065	5.76502	0.01068	OK
0.04015	0.99599	6.77170	0.99466	6.75968	0.01202	OK
0.04645	0.99866	7.77036	1.00000	7.75968	0.01068	OK
0.05274	0.99866	8.76903	1.00000	8.75968	0.00935	OK
0.05904	0.99866	9.76769	1.00000	9.75968	0.00801	OK
0.06533	0.99866	10.76636	1.00000	10.75968	0.00668	OK
0.07162	0.99866	11.76502	1.00000	11.75968	0.00534	OK
0.07792	0.99866	12.76368	1.00000	12.75968	0.00401	OK
0.08421	0.99866	13.76235	1.00000	13.75968	0.00267	OK
0.09051	0.99866	14.76101	1.00000	14.75968	0.00134	OK
0.09680	0.99866	15.75968	1.00000	15.75968	0.00000	OK
y mayor...	1.00000	16.75968	1.00000	16.75968	0.00000	OK

Tabla 10. SSD PARAUCO vs BSANTANDER

Clase	$\int_{-\infty}^x F_{PARAUCO}(t)dt$	$\int_{-\infty}^x F_{PARAUCO}(t)dt$	$\int_{-\infty}^x F_{BSANTANDER}(t)dt$	$\int_{-\infty}^x F_{BSANTANDER}(t)dt$	$\int_{-\infty}^x [F_{PARAUCO}(t) - F_{BSANTANDER}(t)]dt$	
-0.06685	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	OK
-0.06056	0.00000	0.00000	0.00134	0.00134	-0.00134	NO
-0.05426	0.00000	0.00000	0.00134	0.00267	-0.00267	NO
-0.04797	0.00134	0.00134	0.00401	0.00668	-0.00534	NO
-0.04167	0.00267	0.00401	0.00801	0.01469	-0.01068	NO
-0.03538	0.00401	0.00801	0.01335	0.02804	-0.02003	NO
-0.02909	0.01469	0.02270	0.02270	0.05073	-0.02804	NO
-0.02279	0.03338	0.05607	0.05741	0.10814	-0.05207	NO
-0.01650	0.09079	0.14686	0.10280	0.21095	-0.06409	NO
-0.01020	0.17490	0.32176	0.20294	0.41389	-0.09212	NO
-0.00391	0.33645	0.65821	0.35915	0.77303	-0.11482	NO
0.00239	0.59947	1.25768	0.58879	1.36182	-0.10414	NO
0.00868	0.77437	2.03204	0.76636	2.12817	-0.09613	NO
0.01497	0.88518	2.91722	0.86515	2.99332	-0.07610	NO
0.02127	0.93858	3.85581	0.91856	3.91188	-0.05607	NO
0.02756	0.96529	4.82109	0.96395	4.87583	-0.05474	NO
0.03386	0.98665	5.80774	0.98531	5.86115	-0.05340	NO
0.04015	0.99332	6.80107	0.99065	6.85180	-0.05073	NO
0.04645	0.99733	7.79840	0.99599	7.84780	-0.04940	NO
0.05274	0.99733	8.79573	0.99599	8.84379	-0.04806	NO
0.05904	1.00000	9.79573	0.99733	9.84112	-0.04539	NO
0.06533	1.00000	10.79573	0.99733	10.83845	-0.04272	NO
0.07162	1.00000	11.79573	0.99733	11.83578	-0.04005	NO
0.07792	1.00000	12.79573	0.99733	12.83311	-0.03738	NO
0.08421	1.00000	13.79573	0.99866	13.83178	-0.03605	NO
0.09051	1.00000	14.79573	0.99866	14.83044	-0.03471	NO
0.09680	1.00000	15.79573	0.99866	15.82911	-0.03338	NO
y mayor...	1.00000	16.79573	1.00000	16.82911	-0.03338	NO

Tabla 11. SSD PARAUCO vs FALABELLA

Clase	$\int_{-\infty}^x f_{PARAUCO}(t)dt$	$\int_{-\infty}^x F_{PARAUCO}(t)dt$	$\int_{-\infty}^x F_{FALABELLA}(t)dt$	$\int_{-\infty}^x F_{FALABELLA}(t)dt$	$\int_{-\infty}^x [F_{PARAUCO}(t) - F_{FALABELLA}(t)]dt$	
-0.06685	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	OK
-0.06056	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	OK
-0.05426	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	OK
-0.04797	0.00134	0.00134	0.00000	0.00000	0.00134	OK
-0.04167	0.00267	0.00401	0.00134	0.00134	0.00267	OK
-0.03538	0.00401	0.00801	0.00267	0.00401	0.00401	OK
-0.02909	0.01469	0.02270	0.00668	0.01068	0.01202	OK
-0.02279	0.03338	0.05607	0.03071	0.04139	0.01469	OK
-0.01650	0.09079	0.14686	0.06943	0.11081	0.03605	OK
-0.01020	0.17490	0.32176	0.13885	0.24967	0.07210	OK
-0.00391	0.33645	0.65821	0.32310	0.57276	0.08545	OK
0.00239	0.59947	1.25768	0.59012	1.16288	0.09479	OK
0.00868	0.77437	2.03204	0.78772	1.95060	0.08144	OK
0.01497	0.88518	2.91722	0.89453	2.84513	0.07210	OK
0.02127	0.93858	3.85581	0.95060	3.79573	0.06008	OK
0.02756	0.96529	4.82109	0.97864	4.77437	0.04673	OK
0.03386	0.98665	5.80774	0.99065	5.76502	0.04272	OK
0.04015	0.99332	6.80107	0.99466	6.75968	0.04139	OK
0.04645	0.99733	7.79840	1.00000	7.75968	0.03872	OK
0.05274	0.99733	8.79573	1.00000	8.75968	0.03605	OK
0.05904	1.00000	9.79573	1.00000	9.75968	0.03605	OK
0.06533	1.00000	10.79573	1.00000	10.75968	0.03605	OK
0.07162	1.00000	11.79573	1.00000	11.75968	0.03605	OK
0.07792	1.00000	12.79573	1.00000	12.75968	0.03605	OK
0.08421	1.00000	13.79573	1.00000	13.75968	0.03605	OK
0.09051	1.00000	14.79573	1.00000	14.75968	0.03605	OK
0.09680	1.00000	15.79573	1.00000	15.75968	0.03605	OK
y mayor...	1.00000	16.79573	1.00000	16.75968	0.03605	OK

Tabla 12. SSD FALEBELLA vs BSANTANDER

Clase	$\int_{-\infty}^x f_{BSANTANDER}(t)dt$	$\int_{-\infty}^x F_{BSANTANDER}(t)dt$	$\int_{-\infty}^x f_{FALABELLA}(t)dt$	$\int_{-\infty}^x F_{FALABELLA}(t)dt$	$\int_{-\infty}^x [F_{BSANTANDER}(t) - F_{FALABELLA}(t)]dt$	
-0.06685	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	OK
-0.06056	0.00134	0.00134	0.00000	0.00000	0.00134	OK
-0.05426	0.00134	0.00267	0.00000	0.00000	0.00267	OK
-0.04797	0.00401	0.00668	0.00000	0.00000	0.00668	OK
-0.04167	0.00801	0.01469	0.00134	0.00134	0.01335	OK
-0.03538	0.01335	0.02804	0.00267	0.00401	0.02403	OK
-0.02909	0.02270	0.05073	0.00668	0.01068	0.04005	OK
-0.02279	0.05741	0.10814	0.03071	0.04139	0.06676	OK
-0.01650	0.10280	0.21095	0.06943	0.11081	0.10013	OK
-0.01020	0.20294	0.41389	0.13885	0.24967	0.16422	OK
-0.00391	0.35915	0.77303	0.32310	0.57276	0.20027	OK
0.00239	0.58879	1.36182	0.59012	1.16288	0.19893	OK
0.00868	0.76636	2.12817	0.78772	1.95060	0.17757	OK
0.01497	0.86515	2.99332	0.89453	2.84513	0.14820	OK
0.02127	0.91856	3.91188	0.95060	3.79573	0.11615	OK
0.02756	0.96395	4.87583	0.97864	4.77437	0.10147	OK
0.03386	0.98531	5.86115	0.99065	5.76502	0.09613	OK
0.04015	0.99065	6.85180	0.99466	6.75968	0.09212	OK
0.04645	0.99599	7.84780	1.00000	7.75968	0.08812	OK
0.05274	0.99599	8.84379	1.00000	8.75968	0.08411	OK
0.05904	0.99733	9.84112	1.00000	9.75968	0.08144	OK
0.06533	0.99733	10.83845	1.00000	10.75968	0.07877	OK
0.07162	0.99733	11.83578	1.00000	11.75968	0.07610	OK
0.07792	0.99733	12.83311	1.00000	12.75968	0.07343	OK
0.08421	0.99866	13.83178	1.00000	13.75968	0.07210	OK
0.09051	0.99866	14.83044	1.00000	14.75968	0.07076	OK
0.09680	0.99866	15.82911	1.00000	15.75968	0.06943	OK
y mayor...	1.00000	16.82911	1.00000	16.75968	0.06943	OK